Domácí úkol ze cvičení 10.
(prosím, přečtěte si všechny příklady a vyřešte aspoň dva z nich)

I. Opakování „základních" pojmů (zvláště diferenciálu) :

1. Je dána funkce $f(x,y)=4\sqrt{1-\dfrac{y}{x+1}}$.
   a) Najděte definiční obor D funkce f a nakreslete jej. Vypočítejte $\nabla f(0,-3)$;
   b) Ukažte, že funkce f je diferencovatelná v bodě $(0,-3)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f. Napište lineární aproximaci funkce $f(x,y)$ v okolí bodu $(0,-3)$ a rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(0,-3,8)$.

2. Ukažte, že pro malá x, y platí $arctg\dfrac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

3. Je dána funkce f : $f(x,y)=(x^2+y^2).\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2})$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.
   a) Ukažte, že funkce f je spojitá v R^2 .
   b) Vypočítejte $\nabla f(0,0)$;
   c) Ukažte, že funkce f je v bodě (0,0) diferencovatelná, i když nemá bodě (0,0) spojité parciální derivace.

4. a) Ukažte, že je-li funkce diferencovatelná v bodě $X_0\in R^n$, pak má pro libovolný vektor $\vec{a}\in R^n, \vec{a}\neq\vec{o}$ směrovou derivaci $D_{\vec{a}}f(X_0)=\langle\nabla f(X_0),\vec{a}\rangle$.
   b) Zjistěte, zda funkce $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ je v bodě $(1,1)$ ve směru vektoru $\vec{a}=(2,1)$ rostoucí nebo klesající. Najděte vektor $\vec{a}$, $\|\vec{a}\|=1$, v jehož směru funkce f v bodě $(1,1)$ roste nejrychleji.

II. Derivace složené funkce více proměnných (k promyšlení):

1. Derivace složené funkce více proměnných: „technika derivování – předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového" pravidla - jaké to jsou předpoklady?
   a) Je-li $g(t)=f(\sin t,t^2)$, určete $g'(t)$ a $g''(t)$.
   b) Určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce $g(x,y)$, je-li $g(x,y)=f(x^2y,\dfrac{x}{y})$;

2. Nechť funkce $f(x,y)$ má spojité parciální derivace prvního řádu v E^2 a nechť $f(x,x^2)=1$ a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x^2)=x$ pro $x\in R$. Určete $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)$, $x\in R$.

3. Transformujte diferenciální operátor $x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}$ do polárních souřadnic ($x=r\cos\varphi$, $x=r\sin\varphi$, $r\in(0,\infty)$, $\varphi\in[0,2\pi]$).

III. A předběžně „ jednodušší příklady" na vyšetřování extrémů:

1. Vyšetřete na množině $M=R^2$ globální a lokální extrémy v následujících funkcí:
   a) $f(x,y)=12xy-x^2y-xy^2$; b) $f(x,y)=(x-y)^2+(y-1)^3$.
2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y)=x^2+y^2-2y$ na množině M $M=\{(x,y);\ x^2\le y\le 4\}$.